SÍNTESE CONVEXA PARA SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASOS VARIANTES

MÁRCIO F. MIRANDA*, VALTER J. S. LEITE†

*COLTEC / UFMG, Av. Antônio Carlos 6627,
31270-010, Belo Horizonte, MG, Brasil.

†UnED Divinópolis / CEFET–MG, Rua Monte Santo 319,
35502-036, Divinópolis – MG – Brasil.

Emails: fantini@coltec.ufmg.br, valter@ieee.org

Abstract— In this paper some convex conditions are presented in the form of linear matrix inequalities (LMI), yielding sufficient conditions for testing the robust stability of uncertain discrete time systems with time-varying delay. In the sequel, LMI conditions for design robust state feedback gains are given. The proposed conditions are delay-dependent and differently from others found in the literature, they are convex and employ extra matrices yielding less conservative results. Examples are presented to illustrate the efficiency of the proposed conditions.

Keywords— Uncertain discrete-time systems, Time delay systems, Lyapunov-Krasovskii functionals, Linear matrix inequalities.

Resumo— Neste trabalho são apresentadas condições convexas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs) que resultam em condições suficientes para teste de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo. Na seqüência, são dadas condições LMIs para a síntese de ganhos robustos para realimentação de estados. As condições propostas são dependentes do atraso e diferentemente de outras encontradas na literatura, estas são convexas e utilizam matrizes extras levando a resultados menos conservadores. São apresentados exemplos para ilustrar a eficiência das condições propostas.

Palavras-chave— Sistemas incertos discretos no tempo, sistemas com atrasos, Funcionais de Lyapunov-Krasovskii, Desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

A presença de atrasos em sistemas controlados digitalmente é inevitável. Sistemas robóticos, processos de usinagem, redes de comunicação de dados são exemplos de processos que partilham de atrasos que interferem tanto na estabilidade quanto no desempenho desses sistemas. Por isso mesmo, a investigação de sistemas lineares sujeitos a atrasos nos estados tem recebido grande atenção nos últimos anos, como pode ser observado em vários livros nessa área: (Dugard and Verriest, 1997), (Mahmoud, 2000), (Niculescu, 2001), (Gu et al., 2003), (Niculescu and Gu, 2004). Condições para análise de estabilidade e para síntese de controladores estabilizantes para tais sistemas podem ser classificadas em dependentes ou independentes do atraso. Observa-se que a utilização de condições independentes do atraso, para análise de sistemas estáveis com atrasos limitados, pode levar a resultados muito conservadores. Por outro lado, condições dependentes do atraso levam, em geral, a resultados conservadores se aplicadas em sistemas cuja estabilidade independe do valor do atraso. Além disso, condições independentes do atraso não podem ser obtidas tomando-se o limite das formulações dependentes do atraso quando este tende a infinito (Niculescu, 2001, pág. 146). As técnicas mais utilizadas para tais investigações são aquelas baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii e em funcionais de Razumikhin (Niculescu, 2001). Trabalhos importantes nessa área e envolvendo uma formulação convexa para o problema são (Li and de Souza, 1995) e (Li and de Souza, 1996).

O estudo de sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados recebeu muito mais atenção nos últimos anos do que o de sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados (SDTAE), como pode ser visto em (Richard, 2003) e referências internas. Uma das razões para isso vem do fato de que a estabilidade de SDTAE precisamente conhecidos pode ser investigada utilizando-se um sistema aumentado, que envolve estados atrasados (Åström and Wittenmark, 1984). Entretanto, essa técnica apresenta limitações importantes para o estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atrasos variantes no tempo e, sobretudo, para a síntese de controladores robustos (Kapila and Haddad, 1998). Portanto, pode-se dizer que trabalhos tratando de SDTAE são recentes na literatura técnica. Observa-se que a maior parte dos resultados encontrados na literatura são baseados na estabilidade quadrática, isto é, emprega-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii com matrizes independentes da incerteza.

Neste contexto, em (Shi et al., 2003) são propostas formulações não-convexas independentes do atraso, que é considerado fixo, para a síntese de controladores para SDTAE sujeitos a incertezas do tipo limitada em norma. Em (Xu and Chen, 2004) esse mesmo tipo de incerteza é investigada, porém o atraso é considerado variante no tempo. Entretanto, as formulações propostas não são convexas. Em (Fridman and Shaked, 2005b) e (Fridman and Shaked, 2005a) condições dependentes do atraso convexas para a análise de estabilidade e não-convexas para a síntese de controladores são formuladas utilizando a abordagem de sistemas descritores. Nesses trabalhos são tratados tantos os sistemas com incertezas do tipo politópica (Fridman and Shaked, 2005a) quanto os sistemas com incertezas limitadas em norma (Fridman and

Shaked, 2005b). Recentemente, em (Liu et al., 2006), os resultados de (Gao et al., 2004) foram melhorados, porém a abordagem baseada na estabilidade quadrática é empregada e as condições de síntese dependem diretamente das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, o que pode levar a resultados conservadores. Além disso, as formulações obtidas para o caso de síntese de controladores não é convexa e depende diretamente das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii.

No contexto de sistemas incertos livres de atraso a estabilidade quadrática tem sido preterida em favor da estabilidade robusta, que emprega funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (de Oliveira et al., 1999), (Peaucelle et al., 2000), (Leite and Peres, 2003), em particular para sistemas invariantes no tempo. Porém, no contexto de SDTAE há poucos resultados que utilizam funcionais Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros, principalmente para tratar SDTAE . Recentemente, condições convexas independentes do atraso tanto para a síntese robusta de controladores quanto para a estabilização com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ garantido foram propostas em (Leite et al., 2004b) e (Leite et al., 2004a), respectivamente.

Neste trabalho são apresentadas condições convexas dependentes do atraso, para análise de estabilidade e síntese robustas de SDTAE com incertezas politópicas e atrasos variantes no tempo. Essas condições são obtidas a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros e empregam variáveis extras reduzindo o conservadorismo das formulações propostas. A condição de síntese apresentada neste trabalho é convexa e pode ser resolvida de forma eficiente por meio de algoritmos de pontos interiores. São apresentados exemplos que ilustram a eficiência das formulações apresentadas.

Notação: A notação usada neste trabalho é a padrão: x_k denota o estado (discreto no tempo) no instante k. $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$) denotam o conjunto dos números reais (positivos) e $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^*$) é o conjunto dos números naturais (excluído o 0). $\mathbf{I}$ e $\mathbf{0}$ denotam, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula de dimensões apropriadas. $M > \mathbf{0}$ ($M < \mathbf{0}$) significa que a matriz M é definida positiva (negativa) M' e $M^\perp$ denotam a transposta de M e uma base para o espaço nulo de M, respectivamente. O símbolo $\star$ é utilizado para indicar os blocos simétricos nas LMIs. $M = \text{bloco-diagonal}\{M_1, M_2\}$ denota uma matriz M bloco-diagonal formada pelas matrizes M_1 e M_2.

2 Preliminares

Considere o sistema discreto no tempo sujeito a atrasos nos estados dado por

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d(k)} + B(\alpha)u_k \quad (1)$$

$$x_k = \phi(k), \quad k = -\bar{d}, -(\bar{d}-1), \ldots, 0 \quad (2)$$

em que k é o instante de amostragem, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \equiv u(k) \in \mathbb{R}^\ell$ é a entrada de controle, $d(k)$ é o atraso, suposto variante no tempo e limitado por

$$\underline{d} \leq d(k) \leq \bar{d}, \quad (\underline{d}, \bar{d}) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad (3)$$

com $\underline{d}$ e $\bar{d}$ representando os valores mínimo e máximo do atraso, respectivamente. Observe que no caso de atraso incerto e invariante no tempo, tem-se $\underline{d} = \bar{d}$, e assim, $0 < d(k) = d \leq \bar{d}$. As matrizes $[A(\alpha)|A_d(\alpha)|B(\alpha)] \equiv [A|A_d|B](\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times 2n+\ell}$ são invariantes no tempo, incertas e pertencentes ao politopo

$$\mathcal{P} \equiv \Big\{[A|A_d|B](\alpha) \;:\; [A|A_d|B](\alpha) = \sum_{i=1}^{N}[A|A_d|B]_i\alpha_i, \;\; \alpha \in \Omega\Big\} \quad (4)$$

$$\Omega \equiv \Big\{\alpha \;:\; \alpha \in \mathbb{R}^N, \; \sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\Big\} \quad (5)$$

Neste trabalho, os vértices do politopo $\mathcal{P}$, $[A_i|A_{di}|B_i] \equiv [A|A_d|B]_i$, são supostos conhecidos. A seguinte lei de controle é admitida para o sistema (1)

$$u(k) = Kx(k) + K_d x(k - d(k)) \quad (6)$$

em que $(K,\ K_d) \in \mathbb{R}^{\ell\times 2n}$ são os ganhos estáticos para realimentação de estados. É importante observar que se o atraso $d(k)$ não é conhecido, então basta fazer $K_d = \mathbf{0}$ em (6). Por outro lado, se $d(k)$ tem comportamento conhecido a cada instante k, então o uso de K e K_d pode ser explorado para melhorar o desempenho do sistema (1). Levando (6) em (1) obtém-se

$$x_{k+1} = \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d(k)} \quad (7)$$

em que $\tilde{A}(\alpha) \equiv A(\alpha) + B(\alpha)K$ e $\tilde{A}_d(\alpha) \equiv A_d(\alpha) + B(\alpha)K_d$ pertencem ao politopo $\tilde{\mathcal{P}}$

$$\tilde{\mathcal{P}} \equiv \Big\{[\tilde{A}|\tilde{A}_d](\alpha) \;:\; [\tilde{A},\tilde{A}_d](\alpha) = \sum_{i=1}^{N}[\tilde{A}|\tilde{A}_d]_i\alpha_i, \;\; \alpha \in \Omega\Big\} \quad (8)$$

Destaca-se que a implementação da lei de controle proposta em (6) em sistemas digitais pode ser feita armazenando-se $\bar{d}+1$ amostras de $x(k-d)$, $d = 0, \ldots, \bar{d}$. Isso é uma vantagem importante em relação a um controle contínuo no tempo que utiliza realimentação de estados atrasados: o número finito de estados necessários à implementação prática de (6). O seguinte resultado é empregado neste trabalho

Lema 1 (Lema de Finsler) *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\alpha) = \mathcal{Q}(\alpha)' \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que* $\texttt{posto}(\mathcal{B}(\alpha)) < n$. *As seguintes assertivas são equivalentes:*

i) $x'\mathcal{Q}(\alpha)x < \mathbf{0}, \;\; \forall x \;:\; \mathcal{B}(\alpha)x = \mathbf{0}, \;\; x \neq \mathbf{0}$

ii) $\mathcal{B}(\alpha)^{\perp'}\mathcal{Q}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^{\perp} < \mathbf{0}$,

iii) $\exists\, \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{B}(\alpha) < \mathbf{0}$

iv) $\exists\;\; \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times m} \;:\; \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0}$

Veja (de Oliveira and Skelton, 2001) para uma prova da versão do caso em que as matrizes do lema de Finsler não dependem de α. A prova para o caso dependente de parâmetro segue passos similares.

O sistema (7) sujeito a (3), (5) e (8) é dito *robustamente estável* se a solução trivial da equação a diferenças correspondente tem estabilidade global uniforme e assintótica $\forall\ \alpha \in \Omega$. O objetivo deste trabalho é propor condições convexas que propiciem soluções aos seguintes problemas:

Problema 1 *Dados $\underline{d}$ e $\bar{d}$ sujeitos a (3), determine se o sistema (7) sujeito a (5) e (8) é robustamente estável.*

Problema 2 *Determine um par de ganhos (K, K_d) tal que (1)-(5) controlado por (6) seja robustamente estável.*

3 Resultados principais

3.1 Análise de estabilidade robusta

Teorema 2 *Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $Q_i = Q_i' > 0$, $Z_i = Z_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, e G_0, H_0, S_0, F_1, G_1, H_1, M_1, N_1, R_1, F_2, G_2, H_2, M_2, N_2, R_2, de dimensões apropriadas, tais que $\Lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, N$, em que Λ_i é definido em (9), com $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$, $\underline{d}$ e $\bar{d}$ conhecidos, então o sistema (7) sujeito a (3), (5) e (8) é robustamente estável, caracterizando uma solução para o Problema 1. Além disso,*

$$V(\alpha, k) = \sum_{v=1}^{5} V_v(\alpha, k) > 0 \tag{10}$$

com

$$V_1(\alpha, k) = x_k' P(\alpha) x_k, \tag{11}$$

$$V_2(\alpha, k) = \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} x_j' Q(\alpha) x_j, \tag{12}$$

$$V_3(\alpha, k) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} x_j' Q(\alpha) x_j, \tag{13}$$

$$V_4(\alpha, k) = \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m' Z(\alpha) y_m, \tag{14}$$

$$V_5(\alpha, k) = \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y_j' Z(\alpha) y_j, \tag{15}$$

$$y_j = x_{j+1} - x_j, \tag{16}$$

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i; \quad Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Q_i; \tag{17}$$

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i \tag{18}$$

com $\alpha \in \Omega$, é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (7).

Prova: A positividade do funcional (10) é claramente assegurada ao se exigir $P_i = P_i' > 0$, $Q_i = Q_i' > 0$, $Z_i = Z_i' > 0$. Para que (10) seja um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (7)-(8), além de sua positividade, é necessário que

$$\Delta V(\alpha, k) = V(\alpha, k+1) - V(\alpha, k) < 0 \tag{19}$$

$\forall\ [x_k' \quad x_{k-d(k)}']' \neq \mathbf{0}$ e $\forall\ \alpha \in \Omega$. Deste ponto em diante, as parcelas $V_v(\alpha, k)$ são denotadas por $V_v(k)$, $v = 1, \dots, 5$. Para calcular (19) considere:

$$\Delta V_1(k) = x_{k+1}' P(\alpha) x_{k+1} - x_k' P(\alpha) x_k \tag{20}$$

$$\Delta V_2(k) = x_k' Q(\alpha) x_k - x_{k-d(k)}' Q(\alpha) x_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x_i' Q(\alpha) x_i - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x_i' Q(\alpha) x_i \tag{21}$$

Observe que, para $\underline{d} > 0$ o primeiro somatório que aparece em (21) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \Xi_k &\equiv \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x_i' Q(\alpha) x_i \\ &= \sum_{i=k+1-\underline{d}}^{k-1} x_i' Q(\alpha) x_i + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-\underline{d}} x_i' Q(\alpha) x_i \\ &\leq \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x_i' Q(\alpha) x_i + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x_i' Q(\alpha) x_i \end{aligned} \tag{22}$$

Usando (22) em (21), obtém-se

$$\Delta V_2(k) \leq x_k' Q(\alpha) x_k - x_{k-d(k)}' Q(\alpha) x_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x_i' Q(\alpha) x_i \tag{23}$$

$$\Delta V_3(k) = (\bar{d} - \underline{d}) x_k' Q(\alpha) x_k - \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x_i' Q(\alpha) x_i \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_4(k) &= \bar{d} y_k' Z(\alpha) y_k - \sum_{j=-\bar{d}}^{-1} y_{k+j}' Z(\alpha) y_{k+j} \\ &\leq \bar{d} y_k' Z(\alpha) y_k - y_{k-\bar{d}}' Z(\alpha) y_{k-\bar{d}} - \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} y_i' Z(\alpha) y_i \end{aligned} \tag{25}$$

$$\Delta V_5(k) = y_k' Z(\alpha) y_k - y_{k-d(k)}' Z(\alpha) y_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} y_i' Z(\alpha) y_i - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} y_i' Z(\alpha) y_i \tag{26}$$

Observe que os passos seguidos em (21)-(22) podem ser utilizados de forma análoga para majorar o somatório $\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} y_i' Z(\alpha) y_i$ que aparece em (26). Assim, pode-se obter

$$\Delta V_5 \leq y_k' Z(\alpha) y_k - y_{k-d(k)}' Z(\alpha) y_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} y_i' Z(\alpha) y_i \tag{27}$$

Assim, usando (20), (23)-(25) e (27) o lado esquerdo

$$
\Lambda_i \equiv \left[\begin{array}{ccccccc}
P_i+F_1'+F_1-F_2-F_2' & G_1'-G_2'-F_1\tilde{A}_i+F_2 & H_1'-F_1\tilde{A}_{di}-H_2' & F_2+M_1'-M_2' & N_1'-N_2' & R_1'-R_2' & \mathbf{0} \\
\star & \left(\begin{array}{c} G_2+G_2'-\tilde{A}_i'G_1'-G_1\tilde{A}_i \\ +\beta Q_i-P_i+G_0+G_0' \end{array}\right) & H_0'-G_0-\tilde{A}_i'H_1'+H_2'-G_1\tilde{A}_{di} & G_2-\tilde{A}_i'M_1'+M_2' & N_2'-\tilde{A}_i'N_1' & R_2'-\tilde{A}_i'R_1' & S_0'-G_0 \\
\star & \star & -(Q_i+H_1\tilde{A}_{di}+\tilde{A}_{di}'H_1'+H_0+H_0') & H_2-\tilde{A}_{di}'M_1' & -\tilde{A}_{di}'N_1' & -\tilde{A}_{di}'R_1' & -(S_0'+H_0) \\
\star & \star & \star & M_2+M_2'+(\bar{d}+1)Z_i & N_2' & R_2' & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & -Z_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & -Z_i & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -(S_0'+S_0)
\end{array}\right] \qquad (9)
$$

da expressão em (19) pode ser majorado como

$$
\begin{aligned}
\Delta V(k) \leq{} & x_{k+1}'P(\alpha)x_{k+1} \\
& + x_k'[\beta Q(\alpha)-P(\alpha)]x_k - x_{k-d(k)}'Q(\alpha)x_{k-d(k)} \\
& + y_k'(\bar{d}+1)Z(\alpha)y_k - y_{k-\bar{d}}'Z(\alpha)y_{k-\bar{d}} \\
& - y_{k-d(k)}'Z(\alpha)y_{k-d(k)} < 0 \qquad (28)
\end{aligned}
$$

em que $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$. Usando o Lema 1 em (28), com

$$\omega = [x_{k+1}' \; x_k' \; x_{k-d(k)}' \; y_k' \; y_{k-\bar{d}}' y_{k-d(k)}']',$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}(\alpha) = {} & \text{bloco-diagonal}\{ \\
& P(\alpha),\ \beta Q(\alpha)-P(\alpha),\ -Q(\alpha), \\
& (\bar{d}+1)Z(\alpha),\ -Z(\alpha),\ -Z(\alpha)\},
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{A}(\alpha) & -\tilde{A}_d(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e}
$$

$$
\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha) & F_2(\alpha) \\ G_1(\alpha) & G_2(\alpha) \\ H_1(\alpha) & H_2(\alpha) \\ M_1(\alpha) & M_2(\alpha) \\ N_1(\alpha) & N_2(\alpha) \\ R_1(\alpha) & R_2(\alpha) \end{bmatrix}
$$

pode-se escrever que uma condição equivalente a (28) é dada por $\Phi(\alpha) < 0$, em que $\Phi(\alpha) = \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)'$ é formada por blocos $\phi_{ij} = \phi_{ji}'$, $i,j = 1,\ldots,6$, dados por $\phi_{11} = F_1(\alpha)' + F_1(\alpha) - F_2(\alpha)' - F_2(\alpha)$, $\phi_{12} = G_1(\alpha)' + F_2(\alpha) - G_2(\alpha)' - F_1(\alpha)\tilde{A}(\alpha)$, $\phi_{13} = H_1(\alpha)' - F_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) - H_2(\alpha)'$, $\phi_{14} = F_2(\alpha) + M_1(\alpha)' - M_2(\alpha)'$, $\phi_{15} = N_1(\alpha)' - N_2(\alpha)'$, $\phi_{16} = R_1(\alpha)' - R_2(\alpha)'$, $\phi_{22} = G_2(\alpha) + G_2(\alpha)' - G_1(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - \tilde{A}(\alpha)'G_1(\alpha)'$, $\phi_{23} = H_2(\alpha)' - \tilde{A}(\alpha)'H_1(\alpha)' - G_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha)$, $\phi_{24} = G_2(\alpha) - \tilde{A}(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)'$, $\phi_{25} = N_2(\alpha)' - \tilde{A}(\alpha)'N_1(\alpha)'$, $\phi_{26} = R_2(\alpha)' - \tilde{A}(\alpha)'R_1(\alpha)'$, $\phi_{33} = -H_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) - \tilde{A}_d(\alpha)'H_1(\alpha)'$, $\phi_{34} = H_2(\alpha) - \tilde{A}_d(\alpha)'M_1(\alpha)'$, $\phi_{35} = -\tilde{A}_d(\alpha)'N_1(\alpha)'$, $\phi_{36} = -\tilde{A}_d(\alpha)'R_1(\alpha)'$, $\phi_{44} = M_2(\alpha) + M_2(\alpha)'$, $\phi_{45} = N_2(\alpha)'$, $\phi_{46} = R_2(\alpha)'$ e $\phi_{55} = \phi_{56} = \phi_{66} = \mathbf{0}$.

Observe que, se $\Phi(\alpha) < 0$ é verificada, então $\Lambda(\alpha) \equiv \omega'\Phi(\alpha)\omega + \mathcal{N}(\alpha) < 0$ também é verificada $\forall\, \mathcal{N}(\alpha) \equiv 0$. Assim, escolhendo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(\alpha) = 2\big[x_k'G_0(\alpha) + x_{k-d(k)}'H_0(\alpha) + \eta_k'S_0(\alpha)\big] & \\
\times \big[x_k - x_{k-d(k)} - \eta_k\big] & \qquad (29)
\end{aligned}
$$

em que $\eta_k \equiv \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y_j$, com y_j definido em (16), $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dadas em (17)-(18), $F_1(\alpha) = F_1$, $G_1(\alpha) = G_1$, $H_1(\alpha) = H_1$, $M_1(\alpha) = M_1$, $N_1(\alpha) = N_1$, $R_1(\alpha) = R_1$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H_2(\alpha) = H_2$, $M_2(\alpha) = M_2$, $N_2(\alpha) = N_2$, $R_2(\alpha) = R_2$, $G_0(\alpha) = G_0$, $H_0(\alpha) = H_0$ e $S_0(\alpha) = S_0$, todas de dimensões $n \times n$, pode ser verificado que $\Lambda(\alpha) = \tilde{\omega}'\left(\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i\right)\tilde{\omega} < 0$, com $\tilde{\omega} = [\omega',\ \eta_k']'$, $\alpha \in \Omega$ e $\Lambda_i < \mathbf{0}$, completando a prova. □

Destaca-se que a adição do termo nulo (29) à condição obtida do lema de Finsler não introduz dinâmica adicional no sistema, porém as condições resultantes produzem resultados menos coservadores. Condições da estabilidade quadrática são recuperadas do Teorema 2 fazendo-se $P_i = P$, $Q_i = Q$ e $Z_i = Z$, $i = 1,\ldots,N$ em (9). A condição resultante é um conjunto de LMIs com variáveis de folga e matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, (10), independentes do parâmetro α. Neste caso, as matrizes $\tilde{A}(\alpha)$ e $\tilde{A}_d(\alpha)$ podem ser variantes no tempo.

Além disso, é interessante observar que as condições LMIs fornecidas no Teorema 2 contêm variáveis de folga que não formam produtos com as matrizes do sistema nem com as matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii. São elas: F_2, G_2, H_2, M_2, N_2, R_2, G_0, H_0 e S_0. Essas matrizes podem, portanto, ser consideradas dependentes de parâmetro e, eventualmente, com a mesma estrutura de $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dadas em (17) e (18). Pode ser que, nesse caso, as LMIs resultem em condições menos conservadoras. Entretanto, essa extensão não é investigada neste trabalho.

Condições independentes do atraso podem ser obtidas de $\Lambda_i < 0$, com Λ_i dado em (9), eliminando-se os blocos de matrizes correspondentes às linhas 4, 5 e 6 e respectivas colunas e fazendo $Z_i = \mathbf{0}$ em (10). As condições assim obtidas pressupõem que o atraso tenha taxa de variação limitada em módulo igual a $\bar{d} - \underline{d}$. Caso $\underline{d} = \bar{d}$, então o atraso é assumido invariante no tempo. Observe que essas condições não podem ser obtidas diretamente de (9) simplesmente tomando o limite $\bar{d} \to \infty$. Tais condições não são apresentadas aqui por razões de espaço.

3.2 Síntese robusta

As condições de análise de estabilidade robusta dadas pelo Teorema 2 são utilizadas para derivar uma condição convexa para a síntese de ganhos robustos K e K_d tais que a que a lei de controle (6) aplicada em (1) resulte em um sistema robustamente estável em malha fechada, sendo, portanto, uma solução para o Problema 2.

Teorema 3 *Se existirem matrizes $P_i = P_i' > 0$, $Q_i = Q_i' > 0$, $Z_i = Z_i' > 0$, $i = 1,\ldots,N$, e G_0, H_0, S_0, F_2, G_2, H_2, M_2, N_2, R_2, F, W, W_d, de dimensões apropriadas, tais que $\Psi_i < 0$, $i = 1,\ldots,N$, em que Ψ_i é definido em (31), com $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$, $\underline{d}$ e $\bar{d}$ conhecidos, então a malha fechada do sistema (1) sujeito a (3)-(5) e lei de controle dada por (6) em que*

$$K = W'(F')^{-1} \text{ e } K_d = W_d'(F')^{-1} \tag{30}$$

é robustamente estável, caracterizando uma solução para o Problema 2. Além disso, (10)-(16) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade robusta da malha fechada, com $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dadas em (17)-(18).

Prova: A prova pode ser obtida a partir da condição apresentada no Teorema 2: faça $F_1 = F$, $G_1 = H_1 = M_1 = N_1 = R_1 = 0$, substitua com $\tilde{A}_i$ e $\tilde{A}_{di}$ por $(A_i + B_i K)'$ e $(A_{di} + B_i K_d)'$, respectivamente, e realize as mudanças de variáveis $FK' = W$ e $FK_d' = W_d$. □

4 Exemplos

Em todos os cálculos foi utilizando Matlab (R2006b) e *LMI Control Toolbox* rodando em processador Intel Core 2 Duo, $T7600$, 2.33GHz. São indicados os tempos de execução (t_e) para alguns casos.

Exemplo 1: Considere o SDTAE dado em (1) com

$$[A|A_d|B] = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.8 & 0 & -0.1 & 0 & 1 \\ 0.05 & 0.9 & -0.2 & -0.1 & 0.5 \end{array}\right] \tag{32}$$

Esse sistema é investigado em (Liu et al., 2006), em que é feito o projeto de um ganho para realimentação estática de saída, $u_k = D_c y_k$, em que $y_k = Cx_k + C_d x_{k-d(k)}$ e

$$[C|C_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

e $\underline{d} = 2$. Utilizando as condições do Teorema 3, e impondo $W_d = \mathbf{0}$ é possível obter um ganho para realimentação estática de saída utilizando apenas parte da saída, ou seja, $\tilde{y}_k = Cx_k$. Neste caso, como $\texttt{posto}(C) = 2$, o ganho estático pode ser calculado como $D_c = W'(CF')^{-1}$ assegurando a estabilidade da malha fechada para $1 \leq d(k) \leq 13$ com $D_c = -[0.6333 \;\; 0.9963]$ ($t_e = 31.2$ms). Além disso, utilizando a abordagem aqui apresentada, é possível estabilizar esse sistema para qualquer valor de intervalo $[\underline{d},\ \underline{d}+12]$, com $\underline{d} \in [1,\ 9\times 10^{15}]$ realimentando $x(k)$, isto é, com $u(k) = Kx(k)$.

Utilizando a realimentação estática de estados, a condição do Teorema 3 permite calcular K e K_d que estabilizam o sistema para atrasos variando em intervalos tão grandes quanto $\bar{d} - \underline{d} \leq 5\times 10^8$. Por exemplo, para $\underline{d} = 1$ e $\bar{d} = 100$, é possível obter $K = -[0.4391 \;\; 0.3275]$ e $K_d = [0.1779 \;\; 0.0519]$ ($t_e = 15.6$ms).

Exemplo 2: Considere o SDTAE dado em em (1) com $B = [1+\rho,\ 0.5]'$, $A = A_1(1+\rho)$ e $A_d = A_{d1}(1+\delta)$ em que $(\rho,\delta) \in [0,\ 0.1]\times[0,\ 0.1]$ e

$$[A_1|A_{d1}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.6 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.35 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{array}\right] \tag{33}$$

Esse sistema pode ser descrito por um politopo com 4 vértices obtidos a partir das combinações dos valores extremos de ρ e δ. Utilizando as condições do Teorema 2, é possível verificar que esse SDTAE é estável para $1 \leq d(k) \leq 4$, $u_k = 0$, $\forall k$ ($t_e = 0.40$s).

Utilizando o Teorema 3 e calculando *apenas* K é possível assegurar a estabilidade da malha fechada para $1 \leq d(k) \leq 27$. Neste caso, $K = -[0.6162 \;\; 0.1938]$ ($t_e = 0.27$s). Calculando K e K_d é possível assegurar a estabilidade desse sistema para $1 \leq d(k) \leq 486$ e, neste caso, $K = -[0.6240 \;\; 0.3225]$ e $K_d = -[0.1707 \;\; 0.0465]$ ($t_e = 0.36$s). Além disso, utilizando essa abordagem é possível estabilizar esse sistema para qualquer valor de intervalo $[\underline{d},\ \underline{d}+485]$, com $\underline{d} \in [1,\ 9\times 10^9]$.

5 Conclusões

São apresentadas condições convexas dependentes do atraso na forma de testes de factibilidade de LMIs para a análise de estabilidade robusta e para a síntese de ganhos para realimentação de estados para sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo. As principais vantagens da abordagem apresentada estão na convexidade da formulação para a síntese de controladores, no tratamento de atrasos variantes no tempo e na utilização de variáveis de folga. São apresentados exemplos que ilustram a eficiência das condições propostas.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio da FAPEMIG (TEC 840/05) e do CNPq (485496/2006 − 2). Os autores agradecem a leitura cuidadosa e as sugestões feitas pelos revisores.

Referências

Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1984). *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Syst. Contr. Lett.* **37**(4): 261–265.

$$\Psi_i \equiv \begin{bmatrix} P_i + F' + F - (F_2 + F_2)' & F_2 - G_2' - FA_i' + WB_i' & -(FA_{di}' + W_d B_i' + H_2') & F_2 - M_2' & -N_2' & -R_2' & \mathbf{0} \\ \star & G_2 + G_2' + \beta Q_i - P_i + G_0 + G_0' & H_0' - G_0 + H_2' & G_2 + M_2' & N_2' & R_2' & S_0' - G_0 \\ \star & \star & -(Q_i + H_0 + H_0') & H_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(S_0' + H_0) \\ \star & \star & \star & M_2 + M_2' + (\bar{d}+1)Z_i & N_2' & R_2' & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -Z_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -Z_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -(S_0' + S_0) \end{bmatrix} \quad (31)$$

de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, *in* S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, New York, pp. 241–257.

Dugard, L. and Verriest, E. I. (1997). *Stability and Control of Time-delay Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Fridman, E. and Shaked, U. (2005a). Delay dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain discrete delay system, *European J. Contr.* **11**(1): 29–37.

Fridman, E. and Shaked, U. (2005b). Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay system, *Int. J. Contr.* **78**(4): 235–246.

Gao, H., Lam, J., Wang, C. and Wang, Y. (2004). Delay-dependent robust output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay, *IEE Proc. — Contr. Theory and Appl.* **151**(6): 691–698.

Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J. (2003). *Stability of Time-delay Systems*, Control Engineering, Birkhäuser, Boston.

Kapila, V. and Haddad, W. M. (1998). Memoryless $\mathcal{H}_\infty$ controllers for discrete-time systems with time delay, *Automatica* **34**(9): 1141–1144.

Leite, V. J. S. and Peres, P. L. D. (2003). An improved LMI condition for robust $\mathcal{D}$-stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **48**(3): 500–504.

Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. and Peres, P. L. D. (2004a). Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos com atraso nos estados: condições LMI independentes do atraso, *XV CBA*, Gramado, RS.

Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. and Peres, P. L. D. (2004b). A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay, *Proc. 2004 Amer. Control Conf.*, pp. 2870–2875.

Li, X. and de Souza, C. E. (1995). LMI approach to delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems, *Proc. 34th IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 3614–3619.

Li, X. and de Souza, C. E. (1996). Robust stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ of uncertain linear time-delay systems, *Proc. 13th IFAC World Congr.*, Vol. H, San Francisco, CA, pp. 113–118.

Liu, X. G., Martin, R. R., Wu, M. and Tang, M. L. (2006). Delay-dependent robust stabilisation of discrete-time systems with time-varying delay, *IEE Proc. — Contr. Theory and Appl.* **153**(6): 689–702.

Mahmoud, M. S. (2000). *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.

Niculescu, S.-I. (2001). *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Vol. 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, London.

Niculescu, S.-I. and Gu, K. (eds) (2004). *Advances in Time-Delay Systems*, Vol. 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer, London.

Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O. and Bernussou, J. (2000). A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Syst. Contr. Lett.* **40**(1): 21–30.

Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica* **39**(10): 1667–1694.

Shi, P., Boukas, E. K., Shi, Y. and Agarwal, R. K. (2003). Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **157**(2): 435–451.

Xu, S. and Chen, T. (2004). Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers, *Syst. Contr. Lett.* **51**(3-4): 171–183.